



TITLE:

発達した乱流における異常拡散およびカオスの拡散過程を記述する指数 $\nu$ (非線型・非平衡状態の統計力学,研究会報告)

AUTHOR(S):

森, 肇

---

CITATION:

森, 肇. 発達した乱流における異常拡散およびカオスの拡散過程を記述する指数 $\nu$ (非線型・非平衡状態の統計力学,研究会報告). 物性研究 1981, 35(6): F43-F46

ISSUE DATE:

1981-03-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/90197>

RIGHT:

る解の乱流解への逐次遷移については、既に発表した (Prog. Theor. Phys. 64 (1980), 782)。  
研究会では、この系にさらに ( $l=1, m=0$ ), ( $l=2, m=0$ ) の軸対称モードを取入れ  
拡張した模型に関する時間積分の挙動について述べた。実験における渦流の形状から、( $l$   
 $=1, m=4$ ) のモードでは進行波の位相のずれを、因子  $\exp [i \frac{\pi}{2} \cos az]$  によって考慮した。  
解の分岐構造は、周期的運動→準周期的運動 (基本振動数が  $2 \sim 3$ ) →乱流で前の模型と同じ  
であるが、線スペクトルと連続スペクトルの共存とか軸対称モードの不規則振動などの興味深  
い事実がみられる。また同期振動数成分  $\omega \simeq m\Omega/3$  が再現される。

### 発達した乱流における異常拡散および カオスの拡散過程を記述する指数 $\nu$

九大・理 森 肇

乱流やカオスの基本的メカニズムは渦系や相空間のセルの伸長・曲折による混合過程にある  
と思われる。したがって、その伸長・曲折のプロセスをどう捉えるかは基本的問題である。こ  
こでは、2つの巨視的指数

- a) 相似次元  $D$
- b) 拡りの指数  $\nu$

によってこのプロセスをどこまで捉えることができるかを議論した。

発達した乱流は、大小様々の断直径をもった渦糸からなる。その渦糸の一つ一つはランダム  
に曲折しており、時間と共に、さらに細くかつ長く伸びることによって、さらに曲折した細い  
渦糸となる。各時刻で、この渦糸は、溶液中の高分子鎖のように、多数の blob セグメントが連  
なったランダムな鎖と考えてよいだろう。いま、 $t=0$  で、このような blob の一つをとり、そ  
れが時間と共にどのように伸長し曲折していくかをみることにしよう。時刻  $t$  における断直径  
を  $l(t)$ 、体積を  $V(t)$  とすれば、その時刻の blob の個数は

$$N(t) \equiv V(t)/[l(t)]^3 = [r(t)]^{-D} \quad (1)$$

によって与えられる。ただしここで、 $r(t) \equiv l(t)/l(0)$  である。 $D$  は渦糸の相似次元であり、  
間欠性指数  $\mu$  と

森 肇

$$D = 3 - \mu \quad (2)$$

の関係にある<sup>1)</sup>。この  $N(t)$  個の blob からなる鎖の両端の距離  $R(t)$  の自乗平均は、 $N \gg 1$  のとき

$$\langle R^2(t) \rangle = [N(t)]^{2\nu} [\ell(t)]^2 \quad (3)$$

とかける。ここで  $\nu$  は高分子鎖でよく使われる拡りの指数である<sup>2)</sup>。このとき、 $\mathbf{R}(t)$  の確率分布は

$$P(\mathbf{R}, t) = C(t) \exp \left[ -g \left( \frac{R}{\sqrt{\langle R^2(t) \rangle}} \right)^\delta \right], \quad (4)$$

の形をとる。ただし  $R > \sqrt{\langle R^2(t) \rangle}$  であり、指数  $\delta$  は

$$\delta = 1/(1-\nu) \quad (5)$$

によって与えられる。 $g$  は定数であり、 $C(t)$  は時間  $t$  に依存する。渦糸が全くランダムな鎖であれば、 $\nu = 1/2$ 、 $\delta = 2$  となり、(4) はガウス分布となる。

(1) を (3) に入れれば、 $\ell_0 \equiv \ell(0)$  として

$$\langle R^2(t) \rangle / \ell_0^2 = [r(t)]^{-2\phi}, \quad (6)$$

$$\phi = (3 - \mu)\nu - 1 \quad (7)$$

が得られる。したがって、断直径の縮小比  $r(t)$  の時間依存性がわかれば、渦糸が空間的にどのように拡散していくかがわかることになる。渦糸の離散的カスケード模型<sup>1)</sup> を使ってこれをきめると

$$\langle R^2(t) \rangle / \ell_0^2 = [1 - (t/t_\infty)]^{-2\eta} \quad (8)$$

が得られる。ここで  $t_\infty \sim (\ell_0^2/\epsilon)^{\frac{1}{3}}$  は渦糸の寿命（断直径が 0 となる時間）であり、

$$\eta = 3[(3 - \mu)\nu - 1]/(2 + \mu) \quad (9)$$

である。じつは、(8) は、渦糸の断直径  $\ell(t)$  が粘性による散逸の特性長  $\ell_d$  の程度になるまで使える。つまり、 $\ell(t_c) = \ell_d$  できまる時間

$$t_c = t_\infty [1 - (\ell_d/\ell_0)^{(2+\mu)/3}] \quad (10)$$

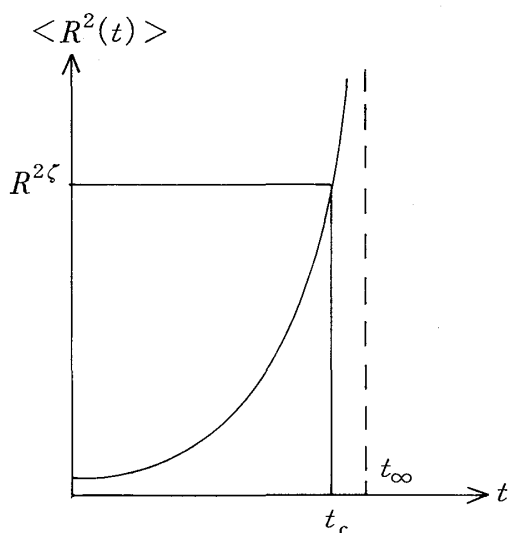
まで使える。これより先は、粘性により渦糸は散逸する。したがって、渦糸の拡りの最大値は

$$\langle R^2(t_c) \rangle = g R^{2\zeta} \quad (11)$$

によって与えられることになる。ここで、 $R$  は Reynolds 数であり、その指数  $\zeta$  は

$$\zeta = (2 + \mu)\eta/(4 - \mu) \quad (12)$$

で与えられる。 $g$  は比例係数である。 $R \rightarrow \infty$  のとき(11)は無有限大となるが、これは  $t_c \rightarrow t_\infty$  となることによる。右図はこれを図示したものである。拡りの最大値の、この  $R$  依存性を実験的に測定できないものであろうか？



渦糸の、この異常拡散は、渦糸の長さの伸長率が断直径の  $2/3$  乗に逆比例することによる。つまり、渦糸が細くなるほど早く伸びることによる。したがって、渦伸長のリャプノフ数は定義できない。これは、(8)のように、時間変化が時間の指数

関数ではなく、巾関数になることによるわけであり、究極的には、発達した乱流のスケーリング則に由来するのである。

間欠性指数  $\mu$  は理論的に  $\mu \simeq 1/3$  ときまる<sup>3)</sup>。 $\nu$  はこの  $\mu$  と  $\nu = 1/(2 - \mu)$  の関係にあると思われる。したがって

$$\nu \simeq 3/5, \eta \simeq 0.77, \zeta \simeq 0.49 \quad (13)$$

となる。 $\eta$  と  $\zeta$  を測定することができれば、逆に、 $\mu$  と  $\nu$  が実験的にきまることになる。

相似次元  $D$  と拡りの指数  $\nu$  とは、散逸力学系の奇妙なアトラクタを特徴づけるのにも有用であると思われる。表 1 はその例である。ここで  $\Delta D$  は曲折の次元である。Koch 曲線と Hénon ア

表 1.  $D = m - \mu$ ,  $\nu = 1/(2 - \mu)$  ( $m$ : 空間の次元)

	$D$	$\nu$	$\mu$	$\Delta D$
Koch 曲線 ( $N=4$ , $r=1/3$ )	1.26	0.79	0.74	0.26
.....	.....	.....	.....	.....
ブラウン曲線	2	$1/2$		
高分子鎖	$5/3$	$3/5$		
Hénon アトラクタ	1.26	0.79	0.74	0.26
Lorenz アトラクタ	2.06	0.94	0.94	0.06
乱流の渦糸	$8/3$	$3/5$	$1/3$	$5/3$

トラクタが同じ  $D$  と  $\nu$  をもつが、これは、巨視的指数  $D$  と  $\nu$  ではこの両者が区別できないことを示している。なお、浸透のクラスターや Lorenz シートなど、高次元のランダムな構造を捉えるには、 $D$  と  $\nu$  だけでは不十分であり、何か別の“形の変数”を導入しなければならないと思

森 肇

われる。

ある離散的なマッピングまたは確率過程において、 $N$ 回のステップの間に、ある事象Aが $n$ 回おこるとしよう。そのとき、 $N \gg 1$ では、

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle \sim N^{2\nu} \quad (14)$$

とおけよう。事象Aが全くランダムにおこるときには $\nu = 1/2$ である。したがって、この $\nu$ はプロセスを特徴づける指数である。プロセスの他の量、たとえば、Hausdorff次元とこの $\nu$ の間には一定の関係があるだろうか？ カオスを示す一次元マッピングや Lorenz 系の Flip-Flop 模型などに、このような観点を導入することは有用であると思われる。

### 参 考 文 献

- 1) H. Mori & H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 1931.
- 2) P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics* (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1979).
- 3) H. Fujisaka & H. Mori, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 54.

### ストレンジアトラクターの次元について

九大・理 徐 丙 鉄

ストレンジアトラクターの構造を表現する量として、その次元がある。次元としてはハウスドルフ次元をとる。 $n$ 次元空間の集合のハウスドルフ次元とは大雑把に言えば、その集合を直径 $l$ の $n$ 次元球で覆うのに必要な最小の球の個数を $N(l)$ としたとき、

$$N(l) \propto l^{-D}, \quad l \rightarrow 0$$

となるが、この指数 $D$ のことである。

従来ストレンジアトラクターの次元をリヤプノフ数を用いて表現してきた。リヤプノフ数とは軌道の不安定性を表現する平均量である。よって、ローカルなアトラクターの構造に依存するハウスドルフ次元がリヤプノフ数のみで一般に表現できるはずがない。そこで、ハウスドルフ次元が分る単純な系について、そのハウスドルフ次元と従来のリヤプノフ数を用いての次元を比較してみた。